

# 有界噪声激励下汽车悬架迟滞非线性系统的响应

牛治东, 吴光强

(同济大学 汽车学院, 上海 201804)

**摘要:** 研究了具有迟滞非线性特性的单自由度汽车悬架非线性模型在有界噪声激励下的响应. 推导了两个有界噪声共同激励下系统的随机梅尔尼科夫(Melnikov)过程, 得到系统发生混沌运动的临界条件. 然后分析了悬架迟滞参数对混沌运动的影响. 运用庞加莱截面(Poincaré Section)、功率谱和最大李雅普诺夫(Lyapunov)指数对系统的混沌运动进行了数值验证. 研究表明, 悬架迟滞非线性系统在两个有界噪声的共同激励下, 存在混沌运动, 且发现在有界噪声激励幅值较小时, 系统不会出现混沌运动, 当有界噪声激励幅值较大时, 系统才有可能出现混沌运动.

**关键词:** 有界噪声; 迟滞非线性; 汽车悬架; 混沌运动

**中图分类号:** U461.1

**文献标志码:** A

## Response of Hysteretic Nonlinear System of Vehicle Suspension Subjected to Bounded Noise Excitation

NIU Zhidong, WU Guangqiang

(College of Automotive Studies, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** The response of single degree of freedom (DOF) of vehicle suspension with nonlinear hysteresis characteristics under the bounded noise excitation was studied. In order to achieve the critical condition of chaotic motion of the system, the stochastic Melnikov process of system subjected to two co-bounded noise excitations was derived. Then, an analysis was made of the influence of suspension hysteresis parameters on the chaotic motion. By using the Poincaré section, power spectrum and the largest Lyapunov exponent, the chaotic motion of system was verified numerically. The results show that, chaotic motion exists in the hysteretic nonlinear suspension system is subjected to two co-bounded noise excitations, and it is found that when the amplitude of bounded noise excitation is small, the system does not appear chaotic motion; while the amplitude is large, chaotic motion

possibly occurs.

**Key words:** bounded noise excitation; hysteretic nonlinear; vehicle suspension; chaotic motion

悬架迟滞非线性系统在随机激励下会产生复杂的非线性动力学行为, 如分岔、混沌和孤立子等. 目前, 对迟滞系统的非线性动力学的研究主要集中在周期、拟周期激励下系统的混沌运动<sup>[1]</sup>, 而随机激励下迟滞非线性系统的混沌运动研究较少, 对有界噪声激励下悬架系统的响应分析, 是对悬架非线性动力学研究的有益补充.

近年来, 对随机激励下非线性系统的混沌运动分析, 运用较多的是随机 Melnikov 方法. 文献[2]研究了具有滞后非线性的汽车悬架系统在随机路面激励下发生混沌的可能性, 推导了随机 Melnikov 过程, 得到均方意义下出现混沌运动的临界激励幅值, 并讨论了噪声强度对系统混沌运动的影响, 但对悬架的非线性采用了位移与速度的三次方进行模拟, 且采用正弦激励叠加高斯白噪声模拟随机路面激励, 悬架的非线性特性描述和随机路面激励的模拟, 具有一定的局限性. 文献[3]研究了有界噪声与谐和函数激励下 1/4 整车模型的动力学行为, 利用随机 Melnikov 方法得到混沌运动的临界条件, 讨论了强度参数对混沌域的影响, 并用最大 Lyapunov 指数和庞加莱截面进行了数值验证, 得到系统在有界噪声与谐和函数激励下系统的动力学行为, 但该模型采用位移和速度的三次方模拟悬架的迟滞非线性特性, 具有一定的局限性. 本文采用幂函数多项式描述悬架的迟滞非线性特性, 运用 Melnikov 方法分析了有界噪声激励下系统发生混沌运动的临界条件, 丰富了随机激励下非线性系统混沌运动的分析方法, 具有一定的理论意义和研究价值.

本文研究了具有迟滞非线性特性的汽车悬架非

收稿日期: 2014-09-21

基金项目: 教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20120072110013); 国家自然科学基金(51105277)

第一作者: 牛治东(1987—), 男, 博士生, 主要研究方向为汽车随机非线性动力学以及混沌分岔等. E-mail: niu99niu122390981@163.com

吴光强(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向车辆动力学与控制. E-mail: wuguangqiang@tongji.edu.cn

线性模型在两个有界噪声共同激励下的响应. 首先, 建立了两个有界噪声激励下具有迟滞特性的悬架非线性模型, 并运用随机 Melnikov 方法, 得到系统发生混沌运动的临界条件. 其次, 分析迟滞参数对系统混沌运动的影响. 最后, 运用功率谱、庞加莱截面和最大 Lyapunov 指数对非线性系统的混沌运动进行数值验证. 研究表明, 迟滞非线性系统在两个有界噪声的共同激励下存在混沌运动, 且发现当有界噪声激励幅值较小时, 系统不发生混沌运动, 当激励幅值较大时, 系统有可能发生混沌运动.

## 1 迟滞模型与有界噪声的描述

### 1.1 迟滞模型

一般的非线性系统在较强的随机载荷作用下表现为迟滞状态, 目前已提出多种迟滞模型来描述系统的迟滞非线性特性, 主要有: 干摩擦模型、双线性模型、迹法模型、Bouc-Wen 模型和 Bingham 模型等<sup>[4]</sup>. 上述模型都是针对某些系统提出的特定模型, 仅对描述某一种或某一类系统的迟滞非线性特性有效. 根据悬架非线性系统的动刚度和阻尼特性, 采用幂函数多项式来描述系统的迟滞非线性特性<sup>[5]</sup>.

$$F(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^{(n_0+1)/2} k_{2i-1} x^{2i-1} + \sum_{i=1}^{(n_0-1)/2} c_{2i} \dot{x}^{2i} \operatorname{sgn}(\dot{x}) = F_k(x) + F_c(x, \dot{x}) \quad (1)$$

式中:  $F_k(x)$  为迟滞恢复力中非迟滞非线性弹性恢复力部分;  $F_c(x, \dot{x})$  为迟滞恢复力中纯迟滞非线性阻尼力部分;  $n$  为奇数;  $x$  为相对位移;  $\dot{x}$  为相对速度;  $k_{2i-1}$  为非线性弹簧力系数 ( $i=1, 2, \dots, n, n$  为正整数);  $c_i$  为非线性阻尼力系数 ( $i=1, 2, \dots, n, n$  为正整数).

对弹性恢复力和阻尼力分别进行分析, 弹性恢复力取前三阶 ( $n_0=3$ ), 非线性阻尼力用阻尼因子进行描述<sup>[6]</sup>, 如下:

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{(n_0+1)/2} k_{2i-1} x^{2i-1} = k_1 x + k_3 x^3 \quad (2)$$

$$F_c(x, \dot{x}) = c |\dot{x}|^n \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (3)$$

式中:  $k_1, k_3$  为非线性弹簧力系数;  $c$  为非线性阻尼力系数;  $n$  为阻尼因子.  $n=0$  时, 系统中的阻尼为干摩擦阻尼;  $n=1$  时, 为粘性阻尼;  $1 > n > 0$  时, 阻尼中既有干摩擦阻尼, 又有粘性阻尼;  $n > 1$  时, 阻尼表现为“高阶”阻尼.

### 1.2 有界噪声

具有有理谱密度的有色噪声, 可由具有随机频率与相位的谐和函数产生. 因幅值有限, 所以, 又称为“有界噪声”. 假设  $\xi(t)$  为有界噪声<sup>[7]</sup>, 则有

$$\xi(t) = \cos(\Omega t + \Psi) \quad (4)$$

式中:  $\Omega$  为平均激励频率;  $\Psi = \sigma B(t) + \chi$ ;  $\sigma$  为频率随机扰动强度;  $B(t)$  为标准 Wiener 过程;  $\chi$  为在  $[0, 2\pi)$  上均匀分布的随机相位.

有界噪声  $\xi(t)$  是一个广义平稳的随机过程, 具有非高斯概率分布, 它的均值为零.  $\xi(t)$  作为一个有界的随机过程, 且本身是一个连续的样本函数, 满足推导 Melnikov 函数应具备的条件, 这里可认为有界噪声是一个合理的随机激励模型<sup>[8]</sup>.

有界噪声的谱密度在等级路面上的分布如图 1 所示, 根据图中不同有界噪声强度下有界噪声的功率谱在等级路面中的分布, 并参考单边功率谱密度道路不平度分级建议<sup>[9]</sup>, 知有界噪声的功率谱在等级路面分级的合理范围内, 可以认为有界噪声是合理的路面激励模型.

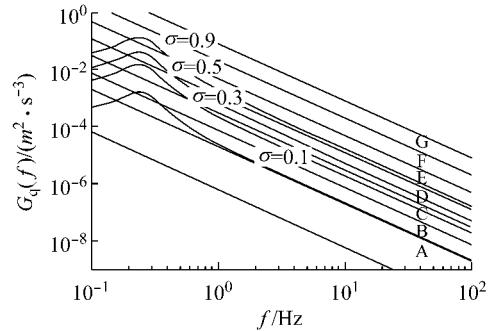


图 1 不同  $\sigma$  下有界噪声的谱密度分布 ( $\Omega=1.5$ )  
Fig.1 Spectral density distributions of bounded noise under different  $\sigma$

## 2 有界噪声激励下迟滞非线性模型

本文研究在两个有界噪声激励下, 迟滞非线性系统的随机响应. 单自由度迟滞非线性系统模型, 如图 2 所示. 图中: 速度为  $v_0$ ;  $z_1$  为激励位移, 由两个不同频率的有界噪声组成;  $z_0$  为系统的垂直位移;  $m$  为系统质量.

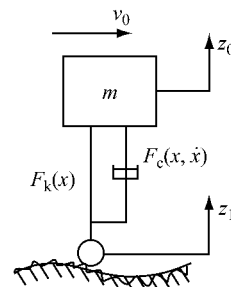


图 2 有界噪声激励下单自由度模型  
Fig.2 Single degree of freedom model under bounded noise excitation

则,系统的运动微分方程为

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{z}_0 + k_1(z_0 - z_1) + k_3(z_0 - z_1)^3 + \\
 & c|\dot{z}_0 - \dot{z}_1|^n \cdot \text{sgn}(\dot{z}_0 - \dot{z}_1) = 0 \quad (5) \\
 & x = z_0 - z_1, \text{ 则 } z_0 = x + z_1, \text{ 式(5)可写为} \\
 & m\ddot{x} + k_1x + k_3x^3 + c|\dot{x}|^n \cdot \text{sgn}(\dot{x}) = -m\ddot{z}_1 \quad (6)
 \end{aligned}$$

对式(6)进行变换得

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + b_1 x^3 + b_2 |\dot{x}|^n \cdot \text{sgn}(\dot{x}) = -\ddot{z}_1 \quad (7)$$

式中:  $\omega_0^2 = k_1/m; b_1 = k_3/m; b_2 = c/m; z_1$  为与位移  $z'$  =  $v_0 t$  相关的随机过程。

令  $z_1 = f(z')$ , 则可得:  $\ddot{z}_1 = d^2 f(z')/dt^2$ , 假设随机激励部分为

$$d^2 f(z')/d(z')^2 = \sigma_1 \xi_1(z') + \sigma_2 \xi_2(z') \quad (8)$$

式中:  $\sigma_1, \sigma_2$  为有界噪声的幅值;  $\xi_1(z'), \xi_2(z')$  为单位有界噪声. 定义  $\tau = \omega_0 t$ , 对式(7)进行量纲为一处理, 得

$$\ddot{x} + x + kx^3 + \alpha |\dot{x}|^n \cdot \text{sgn}(\dot{x}) = -(\nu_0^2 \sigma_1 / \omega_0^2) \cdot \cos(\Omega_1 \tau + \Psi_1) - (\nu_0^2 \sigma_2 / \omega_0^2) \cos(\Omega_2 \tau + \Psi_2) \quad (9)$$

式中:  $k = b_1 \omega_0^{-2}; \alpha = b_2 \omega_0^{n-2}; \Omega_1 = \omega_1 \omega_0^{-1}; \Omega_2 = \omega_2 \omega_0^{-1}$ .

将式(9)写成状态方程的形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_1^3 - \alpha |\dot{x}_1|^n \cdot \text{sgn}(\dot{x}_1) - (\nu_0^2 \sigma_1 / \omega_0^2) \cdot \cos(\Omega_1 \tau + \Psi_1) - (\nu_0^2 \sigma_2 / \omega_0^2) \cos(\Omega_2 \tau + \Psi_2) \end{cases} \quad (10)$$

### 3 发生混沌的临界条件

当系统所受有界噪声激励可以忽略时, 系统无阻尼自由振动方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_1^3 \end{cases} \quad (11)$$

令  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ , 当  $k > 0$  时, 系统有一个不动点:  $p_0 = (0, 0)$ ; 当  $k < 0$  时, 有 3 个不动点:  $p_0 = (0, 0), p_1 = (\sqrt{-1/k}, 0), p_2 = (-\sqrt{-1/k}, 0)$ .  $p_0$  为中心点.  $p_1$  和  $p_2$  为鞍点, 通过两个鞍点的轨道为异宿轨道<sup>[10]</sup>, 且满足  $|x_1| \leq \sqrt{-1/k}$ .

因系统的哈密顿函数  $H$  满足

$$f_1 = \partial H / \partial x_2, f_2 = -\partial H / \partial x_1.$$

则无阻尼自由振动系统(11)的哈密顿函数为

$$H = x_2^2/2 + x_1^2/2 + kx_1^4/4 \quad (12)$$

将点  $p_1$  (或  $p_2$ ) 代入式(12), 得  $H = -1/4k$ , 于是

$$H = x_2^2/2 + x_1^2/2 + kx_1^4/4 = -1/4k \quad (13)$$

得

$$x_2^2 = -1/2k - x_1^2 - kx_1^4/2 = -k(1/k + x_1^2)^2/2 \quad (14)$$

由于  $|x_1| \leq \sqrt{-1/k}$ , 所以, 式(14)化为

$$x_2 = \pm \sqrt{-k/2}(x_1^2 + 1/k) \quad (15)$$

对  $\dot{x}_1 = x_2$  进行积分, 得

$$x_1 = \pm \sqrt{-1/k} \tanh(\sqrt{1/2}\tau) \quad (16)$$

则异宿轨道的方程为

$$\begin{cases} x_1(\tau) = \pm \sqrt{-1/k} \tanh(\sqrt{1/2}\tau) \\ x_2(\tau) = \pm \sqrt{-1/2k} \text{sech}^2(\sqrt{1/2}\tau) \\ = \pm (\sqrt{-1/2k} - \sqrt{-k/2}x_1^2) \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $x_1(\tau)$  的正号表示异宿轨道的正轴部分, 负号表示异宿轨道的负轴部分;  $x_2(\tau)$  的正号表示异宿轨道的上半部分, 负号表示异宿轨道的下半部分. 则系统的随机 Melnikov 过程为

$$\begin{aligned}
 M(\tau_0) = & \int_{-\infty}^{+\infty} [-\alpha x_2(\tau) |\dot{x}_1(\tau)|^n \cdot \text{sgn}(\dot{x}_1(\tau)) - \\
 & (\nu_0^2 \sigma_1 / \omega_0^2) x_2(\tau) \cos[\Omega_1(\tau + \tau_0) + \Psi_1] - \\
 & (\nu_0^2 \sigma_2 / \omega_0^2) x_2(\tau) \cos(\Omega_2(\tau + \tau_0) + \Psi_2)] d\tau \quad (18)
 \end{aligned}$$

令  $M(\tau_0) = M_d - M_{p1} - M_{p2}$ , 则

$$\begin{cases} M_d = \int_{-\infty}^{+\infty} [-\alpha x_2(\tau) |\dot{x}_1(\tau)|^n \cdot \text{sgn}(\dot{x}_1(\tau))] d\tau \\ M_{p1} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\nu_0^2 \sigma_1 / \omega_0^2) x_2(\tau) \cos[\Omega_1(\tau + \tau_0) + \Psi_1] d\tau \\ M_{p2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\nu_0^2 \sigma_2 / \omega_0^2) x_2(\tau) \cos[\Omega_2(\tau + \tau_0) + \Psi_2] d\tau \end{cases} \quad (19)$$

对式(19)积分得

$$\begin{cases} M_d = -\alpha \frac{8}{15} (\sqrt{\frac{1}{-k}})^3 \\ M_{p1} = \sqrt{\frac{2}{-k}} \frac{\nu_0^2 \sigma_1}{\omega_0^2} \pi \Omega_1 \cos(\Omega_1 \tau_0 + \Psi_1) / \sinh(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \Omega_1) \\ M_{p2} = \sqrt{\frac{2}{-k}} \frac{\nu_0^2 \sigma_2}{\omega_0^2} \pi \Omega_2 \cos(\Omega_2 \tau_0 + \Psi_2) / \sinh(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \Omega_2) \end{cases} \quad (20)$$

因此可知  $M_d$  为确定性的量, 与随机激励无关. 运用随机 Melnikov 方法得到的混沌阈值只是一阶近似的理论解. 此时, 随机 Melnikov 过程出现简单零点的条件<sup>[12]</sup> 为  $M(\tau_0) = 0$ , 即

$$M_d = M_{p1} + M_{p2} \quad (21)$$

把式(20)代入式(21), 得临界条件

$$\begin{aligned}
 -\alpha \frac{8}{15} (\sqrt{\frac{1}{-k}})^3 = & \sqrt{\frac{2}{-k}} \frac{\nu_0^2}{\omega_0^2} \pi [\sigma_1 \Omega_1 / \sinh(\pi \Omega_1 / \sqrt{2}) + \\
 & \sigma_2 \Omega_2 / \sinh(\pi \Omega_2 / \sqrt{2})] \quad (22)
 \end{aligned}$$

### 4 数值分析

在数值分析中, 系统参数值为:  $m = 240 \text{ kg}; k_1 =$

16 000 N · m<sup>-1</sup>; k<sub>3</sub> = -10 000 N · m<sup>-3</sup>; c = -50 N · s<sup>2</sup> · m<sup>-2</sup>.

系统激励有界噪声的参数设置:σ=0.5;ω<sub>1</sub>和ω<sub>2</sub>为变化量.为便于分析,令:A=σ<sub>1</sub>=σ<sub>2</sub>.对式(22)进行数值仿真,得到系统发生混沌的临界条件(如图3),当有界噪声的幅值位于图中三维曲面上时,系统可能会发生混沌运动,位于曲面下面时,系统不会产生混沌运动.

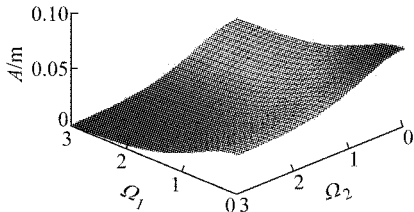


图 3 发生混沌的临界条件

Fig.3 Critical condition of chaotic motions

4.1 迟滞参数对混沌临界值的影响

下面分析了迟滞参数的变化对有界噪声混沌激励幅值 A 的影响.改变 k<sub>1</sub>, k<sub>3</sub> 和 c 的值,根据式(22)得到图 4—图 6.从图中可以看出:k<sub>1</sub> 越大,混沌区域越大,系统发生混沌的可能性越小;k<sub>3</sub> 越大,混沌区

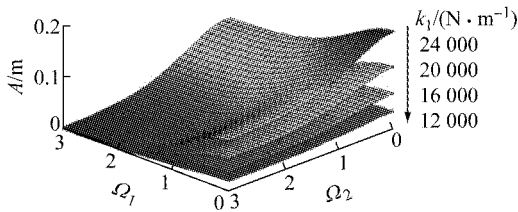


图 4 k<sub>1</sub> 对混沌的影响

Fig.4 Influence on chaos of k<sub>1</sub>

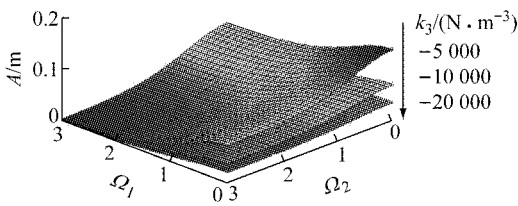


图 5 k<sub>3</sub> 对混沌的影响

Fig.5 Influence on chaos of k<sub>3</sub>

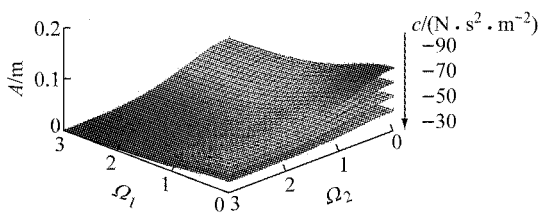


图 6 c 对混沌的影响

Fig.6 Influence on chaos of c

域越大,发生混沌的可能性越小;c 越小,发生混沌的可能性越小.

由这 3 张图,还可以得出:当系统受到的激励幅值较小时,系统不会发生混沌运动;随着激励幅值的增大,当超过系统发生混沌的临界值时,系统可能会发生混沌运动.还说明,系统受到平稳激励时,不会发生混沌运动,当遇到高坡激励时,系统可能发生混沌运动.因混沌运动增加了系统的不确定性,应该尽量避免混沌运动的发生,在汽车悬架系统设计时,本处的分析结果,对悬架参数的选择和设计具有一定的参考价值 and 理论指导意义.

4.2 迟滞系统的响应分析

本文对迟滞系统的混沌运动,运用庞加莱截面、功率谱和最大 Lyapunov 指数进行分析.可以根据以下现象判断系统是否出现混沌运动:

- (1)当系统的庞加莱截面有且仅有一个不动点或者少量的离散点时,运动是周期的;当庞加莱截面为一封闭曲线时,系统运动是准周期的;当庞加莱截面是具有分形结构的密集点时,运动是混沌运动;
- (2)如果功率谱连续,则系统运动可能是混沌运动;
- (3)如果系统的最大 Lyapunov 指数大于零,则系统的运动是混沌运动.

选取参数 ω<sub>1</sub>=35 rad · s<sup>-1</sup>, ω<sub>2</sub>=20√2 rad · s<sup>-1</sup>, 改变激励幅值 A,令 A=0.001 m, A=0.02 m, A=0.15 m,计算系统的庞加莱截面、功率谱(P)和系统最大李雅普诺夫指数(L),结果如图 7—图 9 所示.

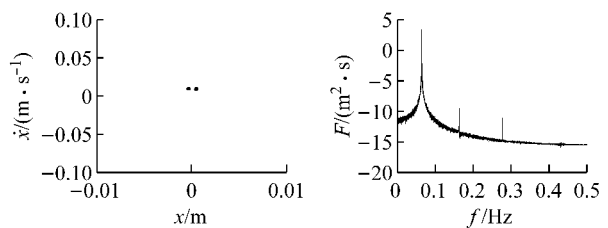


图 7 混沌运动阈值 A=0.001 m, L=0

Fig.7 The threshold of chaotic motions A=0.001 m, L=0

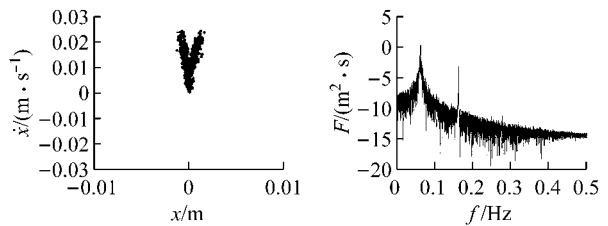


图 8 混沌运动阈值 A=0.02 m, L=0.0137

Fig.8 The threshold of chaotic motions A=0.02 m, L=0.0137

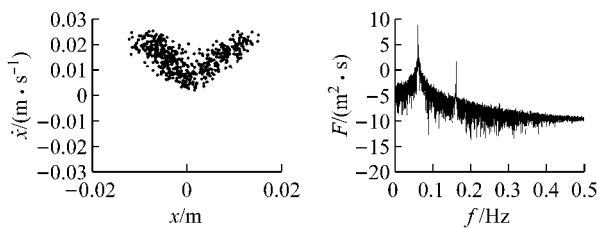


图 9 混沌运动阈值  $A = 0.15 \text{ m}$ ,  $L = 0.417 6$

Fig. 9 The threshold of chaotic motions  $A = 0.15 \text{ m}$ ,  $L = 0.417 6$

当  $A = 0.001 \text{ m}$  时,如图 7,庞加莱截面为两个离散点集,且最大李雅普诺夫指数( $L$ )为零.说明此时系统的运动是周期的.

当  $A = 0.02 \text{ m}$  时,如图 8,庞加莱截面为具有一定形状的离散点集,功率谱连续,最大李雅普诺夫指数( $L$ )大于零,说明此时系统的运动为混沌运动.

当  $A = 0.15 \text{ m}$  时,如图 9,庞加莱截面为具有分形结构的密集点集,功率谱连续,最大李雅普诺夫指数( $L$ )大于零,此时系统为混沌运动状态.

通过比较图 8 和图 9,不难发现,随着有界噪声激励幅值的增大,系统的混沌域有变大的趋势,且最大李雅普诺夫指数也随之增大.且经过大量的计算发现,随着有界噪声激励幅值的增大,系统更容易发生混沌运动.

## 5 结论

本文建立了具有迟滞非线性特性的单自由度非线性模型,对在两个有界噪声共同激励下系统的响应进行了分析.

(1) 运用幂函数多项式描述系统的迟滞非线性特性,建立了单自由度迟滞非线性动力学模型.

(2) 运用随机梅尔尼科夫方法,推导了迟滞非线性系统在两个有界噪声的共同作用下系统发生混沌运动的临界条件.

(3) 分析了系统迟滞参数对混沌的影响,发现  $k_1$  越大,混沌区域越大,发生混沌的可能性越小; $k_3$  越大,混沌区域越大,发生混沌的可能性越小; $c$  越小,发生混沌的可能性越小.

(4) 固定两个有界噪声的频率,改变有界噪声的激励幅值,运用庞加莱截面、功率谱和系统最大李雅普诺夫指数来研究系统的混沌运动.发现当有界噪声的激励幅值小时,系统不发生混沌运动,随着激励幅值的增加,系统会发生混沌运动,且激励幅值越大,系统发生混沌运动的可能性越大.

## 参考文献:

[1] 盛云,吴光强. 汽车非线性悬架的混沌研究[J]. 汽车工程,

2008, 30(1): 57.

SHENG Yun, WU Guangqiang. A chaos research on vehicle nonlinear suspension system [J]. Automotive Engineering, 2008, 30(1): 57.

[2] 杨绍普,李韶华,郭文武. 随机激励滞后非线性汽车悬架系统的混沌运动[J]. 振动. 测试与诊断, 2005, 25(1): 22.

YANG Shaopu, LI Shaohua, GUO Wenwu. Chaos in vehicle suspension system with hysteretic nonlinearity [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2005, 25(1): 22.

[3] Litak G, Borowiec M, Friswell M I, et al. Chaotic vibration of a quarter-car model excited by the road surface profile [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(7): 1373.

[4] 李韶华,杨绍普. 滞后非线性模型的研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2006, 4(1): 8.

LI Shaohua, YANG Shaopu. Research status of hysteretic nonlinearity models [J]. Journal of Dynamic and Control, 2006, 4(1): 8.

[5] 龚宪生,唐一科. 一类迟滞非线性振动系统建模新方法[J]. 机械工程学报, 1999, 35(4): 11.

GONG Xiansheng, TANG Yike. New method for modeling of a nonlinear vibration system with hysteresis characteristics [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering. 1999, 35(4): 11.

[6] 方明霞,谈军,冯奇. 悬架迟滞非线性特性对汽车平顺性的影响[J]. 振动与冲击, 2008, 27(11): 67.

FANG Mingxia, TAN Jun, FENG Qi. Influence of automobile ride comfort by suspension hysteretic nonlinearity property [J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(11): 67.

[7] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制: Hamilton 理论体系框架 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

ZHU Weiqiu. Nonlinear stochastic dynamics and control: hamilton theory framework [M]. Beijing: Science Press, 2003.

[8] 刘雯彦,朱位秋. 有界噪声激励下单摆——谐振子系统的混沌运动[J]. 力学学报, 2003, 35(5): 634.

LIU Wenyan, ZHU Weiqiu. Chaotic motion in perturbations of simple pendulum and harmonic oscillator under bounded noise excitation [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2003, 35(5): 634.

[9] Manfred Mischke, Henning Wallentowitz. 汽车动力学 [M]. 第 4 版. 陈荫三,余强译. 北京: 清华大学出版社, 2009.

Manfred Mischke, Henning Wallentowitz [M]. 4th ed. Translated by CHEN Yinsan, YU Qiang. Vehicle dynamics. Beijing: Tsinghua University Press, 2009.

[10] 李韶华,杨绍普. 具有滞后非线性的汽车悬架中的混沌[J]. 振动测试与诊断, 2003, 23(2): 86.

LI Shaohua, YANG Shaopu. Chaos in vehicle suspension system with hysteretic nonlinearity [J]. Journal of Vibration Measurement & Diagnosis, 2003, 23(2): 86.

[11] 沈栋,黄祥鹿. 随机波浪作用下的船舶倾覆[J]. 船舶力学, 1999, 3(5): 7.

SHEN Dong, HUANG Xianglu. Ship's capsize under irregular wave excitation [J]. Journal of Ship Mechanics, 1999, 3(5): 7.